

随机Dirichlet级数在右半平面的广义逼近

洪甜甜, 霍颖莹

(广东工业大学 数学与统计学院, 广东 广州 510520)

摘要: 通过引入广义级和广义型的概念, 利用Newton多边形, 研究了半平面上用多项式逼近随机Dirichlet级数时所产生的偏差与最大模的关系, 证明了系数是 φ 混合序列且满足(MZ)*条件的随机Dirichlet级数的广义逼近与非随机情况一致。

关键词: φ 混合; 随机Dirichlet级数; 偏差; 广义级; 广义型

中图分类号: O174.52

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2023)03-0105-08

Generalized Approximation of Random Dirichlet Series in the Right Half Plane

Hong Tian-tian, Huo Ying-ying

(School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520 China)

Abstract: By introducing the concept of generalized order and type, and using Newton polygon, a study is conducted on the random Dirichlet series in the right half plane whose coefficients are φ mixing random variables and satisfying the (MZ)* condition and obtain the relationship between the maximum modulus and the error term in approximating.

Key words: φ mixing; random Dirichlet series; error; generalized order; generalized type

1 基本介绍

在Dirichlet级数增长性和相关方面, 众多数学工作者已经取得了一系列重要研究成果^[1-4]。其中有很多关于整函数的研究, 例如, Ritt定义了由Dirichlet级数所确定的增函数的级和下级, 用来描述级数的增长性。随后, 2010年孔荫莹和甘会林^[5]通过引入一族函数, 定义了更精确的广义级, 并得到广义级与其系数和指数之间的关系。另一方面, 徐洪焱和易才凤^[6]从Dirichlet多项式估计Dirichlet级数时得到的误差着手, 探讨了其与Dirichlet级数的级之间的关系。随机Dirichlet级数本质上是一族Dirichlet级数。1932年, Paley和Zygmund研究了Steinhaus-Dirichlet级数和Rademacher-Dirichlet级数两类以独立随机变量序列为系数的随机Dirichlet级数的收敛性。随后, 余家荣^[7]进一步讨论了以独立随机变量序列为系数的随机Dirichlet级数的收敛性问题。丁晓庆和肖益民^[8]

借助Dirichlet级数研究了系数为独立且一致非退化的随机Dirichlet级数的自然边界问题。2012年, 孔荫莹和霍颖莹^[9]在广义级的基础上, 探讨了一类以独立随机变量序列为系数的随机Dirichlet级数的最大模与最大项指标之间的关系。但在现实中, 独立这一条件并不具有普遍性, 而且也难以检验。自然的想法是, 当随机变量序列为非独立时, 随机Dirichlet级数会有什么性质? 本文将在此基础上, 去研究一类系数是非独立的随机变量序列 φ 混合序列的随机Dirichlet级数的广义逼近。其中, φ 混合序列是由Ibragimov^[10]引入的, 表明了变量在指标之差趋于无穷时渐进独立, 关于其更多的性质可以参考文献^[10-11]。

下面给出与本文相关的定义与记号, 为了方便起见, 本文将 C 表示为一个常数, 并且出现先后表示不同的常数。其他记号请参看文献^[1]。

定义1^[1] 设Dirichlet级数

收稿日期: 2021-09-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11501127)

作者简介: 洪甜甜(1998-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为Dirichlet级数与函数论

通信作者: 霍颖莹(1980-), 女, 副教授, 博士, 主要研究方向为Dirichlet级数与函数论。E-mail: huoyingy@gdut.edu.cn

$$g(s)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\mathrm{e}^{-\lambda_n s}\tag{1}$$

式中： $\{b_n\}$ 是一正实数数列， $0<\lambda_n\uparrow\infty$ ， $s=\sigma+\mathrm{i}t$ 表示一复变量。

假设级数 $g(s)$ 满足

$$\limsup_{n\rightarrow+\infty}\frac{\ln b_n}{\lambda_n}=0\tag{2}$$

$$\liminf_{n\rightarrow+\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=h>0\tag{3}$$

那么由式(3)和文献[1]中引理3.1.1可得

$$\limsup_{n\rightarrow+\infty}\frac{n}{\lambda_n}=D<+\infty\tag{4}$$

式(3)、(4)中： $Dh\leqslant 1$ 。从而有

$$\limsup_{n\rightarrow+\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}\leqslant\limsup_{n\rightarrow+\infty}\frac{\ln(D+\varepsilon)}{\lambda_n}=0$$

若令 σ_c 、 σ_u 、 σ_a 分别表示级数 $g(s)$ 的收敛、一致收敛和绝对收敛横坐标，则由Valiron公式

$$\begin{aligned}\limsup_{n\rightarrow+\infty}\frac{\ln b_n}{\lambda_n}&\leqslant\sigma_c\leqslant\sigma_u\leqslant\sigma_a\leqslant\\\limsup_{n\rightarrow+\infty}\frac{\ln b_n}{\lambda_n}+\limsup_{n\rightarrow+\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}\end{aligned}$$

可得

$$\sigma_c=\sigma_u=\sigma_a=0$$

即级数 $g(s)$ 在右半平面是收敛、一致收敛和绝对收敛的。因此，对于任意的 $\sigma>0$ ，可以分别定义级数 $g(s)$ 的最大模、最大项以及最大项指标为

$$\begin{aligned}M(\sigma,g)&=\sup\{|g(\sigma+\mathrm{i}t)|:t\in\mathbf{R}\}\\m(\sigma,g)&=\max\{|b_n|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}:n\in\mathbf{N}\}\\n(\sigma)&=n(\sigma,g)=\max\{n:|b_n|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}=m(\sigma,g)\}\end{aligned}$$

为了描述慢增长($\rho=0$)整函数的增长性，下面引入广义级和广义型。令 Λ 表示满足以下两个条件的函数 $\alpha(x)$ 所构成的集合。

条件1 $\alpha(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，当 $x\leqslant 0$ 时， $\alpha(x)$ 为常数；当 $x>0$ 时， $\alpha(x)$ 为严格递增，取值为正的可微函数。

条件2 令 d 表示微分符号，存在 $p\in\mathbf{N}$ ，使得

$$\lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha(x)}{\mathrm{d}(\ln^{[p]}x)}=k\in(0,\infty)$$

式中： $\ln^{[p]}x=\ln^{[p-1]}\ln x$ 。

定义2^[12] 设 $\alpha(x)\in\Lambda$ ，则级数 $g(s)$ 的广义级为

$$\rho=\rho(\alpha,g)=\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\alpha(\ln M(\sigma,g))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)}$$

若 $\rho\in(0,\infty)$ ，则级数 $g(s)$ 的广义型为

$$\tau=\tau(\alpha,g)=\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\beta(\ln M(\sigma,g))}{\left[\beta\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^\rho}$$

式中： $\beta(\ln x)=\alpha(x)$ 。特别地，当 $\alpha(x)=\ln x$ 时，广义级和型分别为Ritt级和Ritt型。此外，根据参考文献[12]中的引理2.3可知，对于级数 $g(s)$ ，当 $E\in(0,\infty)$ 时，有

$$\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\alpha(\ln M(\sigma,g))}{\left[\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^E}=\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\alpha(\ln m(\sigma,g))}{\left[\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^E}$$

为了证明本文所得到的结论，在这里将构造与级数相应的Newton多边形，并得到与级数式(1)具有相同广义级和广义型的Dirichlet级数。具体作法如下。

第1步 取定 $\sigma>0$ ，过 XOY 平面上点列

$$\{A_n\}=\{(\lambda_n,-\ln b_n)\}$$

中的每一点，作斜率为 $-\sigma$ 的直线，进而可以得到斜率为 $-\sigma$ 的直线所构成的集合

$$\{L(\sigma)\}=\{y|y=-\sigma x-\ln b_n\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}\}$$

由于每一条直线都对应一个在 y 轴的截距，因此可以得到级数 $g(s)$ 在 σ 时的最大项满足

$$\begin{aligned}\ln m(\sigma,g)&=\max\{\ln b_n\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}:n\geqslant 1\}=\\\min\{-\ln b_n\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}:n\geqslant 1\}\end{aligned}$$

第2步 根据 σ 的任意性，便可以得到对于任意的一个 $\sigma>0$ ，级数 $g(s)$ 的最大项 $m(\sigma,g)$ 和最大项指标 $n(\sigma)$ 。又 $n(\sigma)$ 为关于 σ 的增函数，从而为阶梯函数且至多只有可数个间断点，其间断点集记为 $\{\sigma_l\}$ ，相应地， $n(\sigma_l)=n_{l+1}$ 。最后再通过依次连接最大项指标所对应的点

$$A_{n(\sigma)}=(\lambda_{n(\sigma)},-\ln b_{n(\sigma)})$$

便得到级数 $g(s)$ 所对应的Newton多边形 $\Pi(g)$ 。

由Newton多边形 $\Pi(g)$ 的作法，不难发现 $\Pi(g)$ 的顶点是点列 $\{A_n\}$ 中的部分点，因此不妨设 $\Pi(g)$ 的顶点为

$$\{A_{n_l}\}=\{(\lambda_{n_l},-\ln b_{n_l})\}$$

若令

$$-\sigma_l=\frac{-\ln b_{n_{l+1}}+\ln b_{n_l}}{\lambda_{n_{l+1}}-\lambda_{n_l}}$$

则

$$\ln m(\sigma_l,g)=\ln b_{n_l}-\lambda_{n_l}\sigma_l=\ln b_{n_{l+1}}-\lambda_{n_{l+1}}\sigma_l$$

此外，由 σ_l 的作法可知，对于任意的 $\sigma>0$ ，存在 σ_l 和 σ_{l+1} ，使得 $\sigma\in(\sigma_{l+1},\sigma_l]$ ，有 $n(\sigma)=n_l$ 。

从而得到级数

$$\bar{g}(\sigma) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{n_l} e^{-\lambda_{n_l} \sigma} \quad (5)$$

式中: $\{n_l\} \subset \{n\}$, 则对于任意的正数 σ , 存在 σ_l , 满足 $\sigma \in (\sigma_{l+1}, \sigma_l]$, 从而

$$\ln m(\sigma, g) = \ln b_{n(\sigma)} e^{-\lambda_{n(\sigma)} \sigma} = \ln b_{n_l} e^{-\lambda_{n_l} \sigma} = \ln m(\sigma, \bar{g})$$

即级数 $g(s)$ 和 $\bar{g}(s)$ 有相同的广义级和广义型。

下文还需要给出级数误差的定义。

定义3^[6] 令 ϕ_k 表示阶数不大于 k 的所有 Dirichlet 多项式所构成的集合, 则对于任意给定的 $\alpha (0 < \alpha < \infty)$ 和正整数 n , 可以定义级数 $g(s)$ 的误差为

$$E_n(g, \alpha) = \inf_{p \in \phi_k} \|g - p\|_{\alpha}$$

式中: $\|g - p\|_{\alpha} = \sup_{t \in \mathbf{R}} |g(\alpha + it) - p(\alpha + it)|$ 。

为了证明本文提出的结论, 还要给出 φ 混合序列的定义。

定义4^[10] $\{X_n\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的复值随机变量, $\mathbb{P}$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率, 对于任意的 $n, m \in \mathbf{N}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若

$$\varphi(n) = \sup_{m \in \mathbf{N}} \sup_{A \in \mathcal{F}_1^m, B \in \mathcal{F}_{m+n}^{\infty}} |\mathbb{P}(B|A) - \mathbb{P}(B)| \rightarrow 0$$

则称 $\{X_n\}$ 是 φ 混合序列, 其中

$$\mathcal{F}_j^k = \sigma(X_n : n = j, j+1, \dots, k)$$

为 σ 域。

通过 φ 混合序列的定义不难发现, 如果对于任意的 $n \in \mathbf{N}$, 都满足 $\varphi(n) = 0$, 那么对于任意的 $A \in \mathcal{F}_0^m, B \in \mathcal{F}_{m+n}^{\infty}$, 可以得到

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

即随机序列 $\{X_n\}$ 独立。

定义5^[1] 设随机 Dirichlet 级数

$$f_{\omega}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\omega) e^{-\lambda_n s}$$

式中: $0 < \lambda_n \uparrow \infty, s = \sigma + it (\sigma, t \in \mathbf{R}), \{X_n\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 φ 混合序列, 并且满足 (MZ)^{*[13]} 条件, 即对于任意的正整数 n , 存在正数 d_1 , 使得

$$0 \leq d_1^2 b_n^2 = d_1^2 E|X_n|^2 \leq E^2 |X_n| < \infty \quad (6)$$

本文假设随机 Dirichlet 级数 $f_{\omega}(s)$ 满足式 (2)、(3)、(6), 那么对于级数 $f_{\omega}(s)$ 而言, 可以得到有关于它的收敛性的结论。

定理1 对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 级数 $f_{\omega}(s)$ 在右半平面上收敛、一致收敛、绝对收敛, 即

$$\sigma_c(\omega) = \sigma_u(\omega) = \sigma_a(\omega) = 0, \text{ a.s.,}$$

式中: $\sigma_c(\omega), \sigma_u(\omega), \sigma_a(\omega)$ 分别为级数 $f_{\omega}(s)$ 的收敛、一

致收敛和绝对收敛横坐标。

此外, 本文还得到误差与级之间的关系。

定理2 对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 级数 $f_{\omega}(s)$ 和 $g(s)$ 的偏差在右半平面上的广义级一致, 即

(1) 当 $p = 1$ 时,

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, f_{\omega}))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)} + 1 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha\left(\frac{\lambda_n}{\ln E_{n-1}(g, \alpha) e^{\lambda_n \alpha}}\right)}$$

(2) 当 $p = 2, 3, \dots$ 时,

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, f_{\omega}))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha\left(\frac{\lambda_n}{\ln E_{n-1}(g, \alpha) e^{\lambda_n \alpha}}\right)}$$

定理3 若级数 $f_{\omega}(s)$ 的广义级 $\rho \in (1, \infty)$, 则对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 级数 $f_{\omega}(s)$ 和 $g(s)$ 的误差在右半平面上的广义型一致, 即

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\beta(\ln M(\sigma, f_{\omega}))}{\left[\beta\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^{\rho}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta(\lambda_n)}{\left[\beta\left(\frac{\lambda_n}{\ln E_{n-1}(g, \alpha) e^{\lambda_n \alpha}}\right)\right]^{\rho}}$$

推论1 设级数 $f_{\omega}(s)$ 满足式 (2)、(3)、(6), 则对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 有

(1) 当 $p = 1$ 时,

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, f_{\omega}))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)} + 1 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha\left(\frac{\lambda_n}{\ln |b_n|}\right)}$$

(2) 当 $p = 2, 3, \dots$ 时,

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, f_{\omega}))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha\left(\frac{\lambda_n}{\ln |b_n|}\right)}$$

推论2 设级数 $f_{\omega}(s)$ 满足式 (2)、(3)、(6), 并且级数 $f_{\omega}(s)$ 的广义级 $\rho \in (1, \infty)$, 则对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 有

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\beta(\ln M(\sigma, f_{\omega}))}{\left[\beta\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^{\rho}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta(\lambda_n)}{\left[\beta\left(\frac{\lambda_n}{\ln |b_n|}\right)\right]^{\rho}}$$

2 一些引理

引理1^[14] 若 $\{X_n\}$ 是 φ 混合序列, 并且满足式 (6), 则对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 存在 $N(\omega) > 0$, 当 $n > N(\omega)$ 时, 有

$$|X_n(\omega)| \leq nb_n \quad (7)$$

且对于 $\{X_n\}$ 的任意子列 $\{X_{n_k}\}$, 有

$$\mathbb{P}\left(\left\{|X_{n_k}| \geq \frac{d_1}{2} b_{n_k}\right\}, \text{ i.o.}\right) = 1 \quad (8)$$

为了证明所提出的结论,还需要用到误差与系数、最大项之间的关系。

引理2^[6] 若级数 $g(s)$ 满足式(2)、(3),那么对于任意的 $n \in \mathbf{N}$,任意的 $\alpha(0 < \alpha < \infty)$ 以及充分小的正数 $\sigma < \frac{\alpha}{2}$,有

$$|b_n|e^{-\lambda_n\alpha} \leq 2E_{n-1}(g,\alpha) \leq Tm(\sigma,g)e^{-\lambda_n(\alpha-\sigma)}$$

式中: T 是与 σ, n 无关的常数。

其次,广义级函数有以下性质。

引理3^[12] 设 $\alpha(x) \in \Lambda$,则

(1) 对于任意的正数 C_1, C_2 以及实数 A :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(C_1x + C_2)}{\alpha(x)} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x^A)}{\alpha(x)} = A$$

(2) 对于任意的 $0 < A_1, A_2 < A_3$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{-1}[A_1\alpha(x)]\alpha^{-1}[A_2\alpha(x)]}{\alpha^{-1}[A_3\alpha(x)]} = 0$$

(3) 当 $p = 1$ 时,对任意 $A > 0$,存在 $0 < B < \frac{1}{2}$,

使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln Ax}{\frac{x}{\alpha^{-1}[B\alpha(x)]}} = 0$$

(4) 当 $p = 2, 3, \dots$ 时,对任意的正数 $A_1, A_2 < 1$,存在 $0 < B < \frac{1}{2}$,使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln A_1x}{\frac{x}{\alpha^{-1}[A_2\alpha(x^B)]}} = 0$$

证明 对于该引理(1)、(2)的证明,可以参考文献[12]中的引理2.2。下证明(3)、(4)。

首先,由 $\alpha(x)$ 的性质

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\ln^{[p]}x} = k \in (0, \infty)$$

可知,对任意正数 δ ,存在 $X(\delta) > 0$,当 $x > X(\delta)$ 时,

$$\alpha^{-1}[A_1\alpha(x)] < \exp^{[p]} \left\{ \frac{A_1(k+\delta)\ln^{[p]}x}{(k-\delta)} \right\}$$

下文先证明引理3(3)。

当 $p = 1$ 时,由 $\frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x} - 1$ 可得

$$\frac{\ln x}{\alpha^{-1}[B\alpha(x)]} \leq x^{\frac{B(k+\delta)}{(k-\delta)}} (2x^{\frac{1}{2}} - 2) \leq 2x^{\frac{B(k+\delta)}{(k-\delta)} - \frac{1}{2}}$$

因此,当正数 δ 充分小且 $0 < B < \frac{1}{2}$ 时,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln Ax}{\frac{x}{\alpha^{-1}[B\alpha(x)]}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{x}{\alpha^{-1}[B\alpha(x)]}} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^{\frac{B(k+\delta)}{(k-\delta)} - \frac{1}{2}} = 0$$

下文再证明引理3(4)。

当 $p = 2, 3, \dots$ 时,若 $0 < B < \frac{1}{2}$,则由 $\alpha(x)$ 的单调性以及 $\frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x} - 1$ 可得

$$\frac{\ln x}{\frac{x}{\alpha^{-1}[A_1\alpha(x^B)]}} \leq \frac{2\sqrt{x} - 2}{x} \alpha^{-1}[A_1\alpha(\sqrt{x})] \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \alpha^{-1}[A_1\alpha(\sqrt{x})]$$

又由引理3(2)可得

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln A_1x}{\frac{x}{\alpha^{-1}[A_2\alpha(x^B)]}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{x}{\alpha^{-1}[A_2\alpha(x^B)]}} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{-1}[A_2\alpha(\sqrt{x})]}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{-1}[A_2\alpha(\sqrt{x})]}{\alpha^{-1}[\alpha(\sqrt{x})]} = 0$$

证毕。

引理4 对于级数 $f_\omega(s)$,当 $E \in (0, \infty)$ 时,对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s.,

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, f_\omega))}{\left[\alpha \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right]^E} = \limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\ln m(\sigma, f_\omega))}{\left[\alpha \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right]^E}$$

证明 与参考文献[12]中的引理2.3类似,此处不再证明。

引理5^[15] 级数 $g(s)$ 满足式(2)、(3),则

(1) 当 $p = 1$ 时:

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, g))}{\alpha \left(\frac{1}{\sigma} \right)} + 1 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha \left(\frac{\lambda_n}{\ln E_{n-1}(g, \alpha) e^{\lambda_n \alpha}} \right)}$$

(2) 当 $p = 2, 3, \dots$ 时:

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, g))}{\alpha \left(\frac{1}{\sigma} \right)} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha \left(\frac{\lambda_n}{\ln E_{n-1}(g, \alpha) e^{\lambda_n \alpha}} \right)}$$

(3) 若级数 $g(s)$ 的广义级 $\rho \in (1, \infty)$,则

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\beta(\ln M(\sigma, g))}{\left[\beta \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right]^\rho} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta(\lambda_n)}{\left[\beta \left(\frac{\lambda_n}{\ln E_{n-1}(g, \alpha) e^{\lambda_n \alpha}} \right) \right]^\rho}$$

最后,还需要用到以下结论。

引理6^[7] 设 $b, \sigma \in (0, +\infty)$,则函数

$$h(x) = -bx \ln x - x\sigma$$

在 $x = e^{-\left(\frac{\sigma}{b+1}\right)}$ 处,取得最大值 $be^{-\left(\frac{\sigma}{b+1}\right)}$ 。函数

$$h(x) = x^{-b} + \sigma x$$

在 $x = \left(\frac{b}{\sigma}\right)^{\frac{b}{b+1}}$ 处,取得最小值 $(b+1)\left(\frac{\sigma}{b}\right)^{\frac{b}{b+1}}$.

3 定理证明

定理1证明 首先由式(4),即

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty$$

和式(7)可知,对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 存在 $N_1 \in \mathbf{N}$, 当 $n > N_1$ 时,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln |X_n|}{\lambda_n} &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln b_n}{\lambda_n} \leq \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(D+\varepsilon)\lambda_n}{\lambda_n} + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln b_n}{\lambda_n} &= 0. \end{aligned}$$

其次由式(8)可知,序列 $\{X_n\}$ 存在一子列 $\{X_{n_k}\}$ 满足

$$|X_{n_k}| \geq \frac{d_1}{2} b_{n_k}$$

因此,有

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln |X_n|}{\lambda_n} \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln |X_{n_k}|}{\lambda_{n_k}} \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{d_1}{2} b_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = 0$$

最后由Valiron公式可得

$$\sigma_c(\omega) = \sigma_u(\omega) = \sigma_a(\omega) = 0, \text{ a.s.}$$

证毕。

定理2证明 首先,根据引理4可知,对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., $M(\sigma, f_\omega)$ 可以用 $m(\sigma, f_\omega)$ 替换。

下记 $A_{n,\alpha}(g, \alpha) = E_{n-1}(g, \alpha) e^{\lambda_n \alpha}$. 并令

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha\left(\frac{\lambda_n}{\ln A_{n,\alpha}(g, \alpha)}\right)} = L \quad (9)$$

则对任意的正数 ε , 存在 $N(\varepsilon) > 0$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 有

$$\ln A_{n,\alpha}(g, \alpha) < \frac{\lambda_n}{\alpha^{-1}\left[\frac{\alpha(\lambda_n)}{L+\varepsilon}\right]}$$

再由引理2可得

$$\ln |b_n| e^{-\lambda_n \sigma} < \frac{\lambda_n}{\alpha^{-1}\left[\frac{\alpha(\lambda_n)}{L+\varepsilon}\right]} - \lambda_n \sigma + \ln 2$$

最后由式(7)和式(4)可得,对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon) > 0$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 对任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 有

$$\begin{aligned} \ln |X_n| e^{-\lambda_n \sigma} &\leq \ln b_n e^{-\lambda_n \sigma} + \ln n \leq \\ \frac{\lambda_n}{\alpha^{-1}\left[\frac{\alpha(\lambda_n)}{L+\varepsilon}\right]} - \lambda_n \sigma + \ln 2(D+\varepsilon)\lambda_n &\quad (10) \end{aligned}$$

情形(1) 当 $p = 1$ 时, 首先由 $\alpha(x)$ 的单调性, 引理

3(3)以及式(10)可得, 存在 $B > \max\left\{1, \frac{2-L}{\varepsilon}\right\}$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon) > 0$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 有

$$\ln |X_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leq \lambda_n \left\{ \frac{2}{\alpha^{-1}\left[\frac{\alpha(\lambda_n)}{L+B\varepsilon}\right]} - \sigma \right\} \quad (11)$$

其次,由 $\alpha(x)$ 的性质

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d\alpha(x)}{d(\ln[p]_x)} = k \in (0, \infty)$$

可知,对于任意的正数 δ , 存在 $N(\delta) > 0$, 使得当 $n > N(\delta)$ 时, 有

$$\exp^{[p]} \left\{ \frac{(k-\delta)\ln[p]\lambda_n}{(L+B\varepsilon)(k+\delta)} \right\} < \alpha^{-1} \left[\frac{1}{L+B\varepsilon} \alpha(\lambda_n) \right]$$

由式(11)及引理6可得, 当 $x = C \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{(k+\delta)(L+B\varepsilon)}{k-\delta}}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \ln |X_n| e^{-\lambda_n \sigma} &\leq \lambda_n \left\{ \frac{2}{\alpha^{-1}\left[\frac{\alpha(\lambda_n)}{L+B\varepsilon}\right]} - \sigma \right\} \leq \\ \max_{x \in \mathbf{R}} \left\{ x \left[2 \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{k-\delta}{(k+\delta)(L+B\varepsilon)}} - \sigma \right] \right\} &= \\ C \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\frac{(k+\delta)(L+B\varepsilon)-(k-\delta)}{k-\delta}} & \end{aligned}$$

最后, 当 $\sigma > 0$ 充分小时, 有 $n(\sigma) > N(\varepsilon)$, 由 $\alpha(x)$ 的单调性以及引理3(1)可得, 对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 有

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\ln m(\sigma, f_\omega))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \leq L - 1$$

情形(2) 当 $p = 2, 3, \dots$ 时, 首先由 $\alpha(x)$ 的单调性, 引理3(4) 以及式(10)可得, 存在 $B \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon) > 0$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 有

$$\ln |X_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leq \lambda_n \left\{ \frac{2}{\alpha^{-1}\left[\frac{\alpha(\lambda_n^B)}{L+B\varepsilon}\right]} - \sigma \right\}$$

且

$$\alpha^{-1} \left[\frac{\alpha(\lambda_n^B)}{L+\varepsilon} \right] \geq 2$$

因此, 当 $\sigma > 0$ 充分小时,

$$\frac{2}{\alpha^{-1}\left[\frac{\alpha(\lambda_n^B)}{L+\varepsilon}\right]}-\sigma\leqslant 1$$

当 $\sigma>0$ 充分小时,令

$$H=H(\sigma)=\alpha^{-1}\left[(L+\varepsilon)\alpha\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right]$$

则对任意 $n>N(\varepsilon)$,当 $\lambda_n\leqslant H$ 时,有

$$\ln|X_n|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}\leqslant\alpha^{-1}\left[(L+\varepsilon)\alpha\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right]\tag{12}$$

当 $\lambda_n>H$ 时,有 $\frac{2}{\sigma}\leqslant\alpha^{-1}\left[\frac{\alpha(\lambda_n)}{L+\varepsilon}\right]$ 。从而

$$\ln|X_n|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}<\frac{\lambda_n}{2}(\sigma-\sigma)=0$$

所以对于任意的 $n>N(\varepsilon)$,式(12)成立,因此对于任意的 $\omega\in\Omega$,a.s.,有

$$\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\alpha(\ln m(\sigma,f_\omega))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)}\leqslant L$$

下证等式成立。

情形(1) 由Newton多边形作法和引理5(1)可知,存在级数式(5),满足

$$\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\alpha(\ln m(\sigma,\bar{g}))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)}=\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\alpha(\ln m(\sigma,g))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)}=L-1$$

再选取序列 $\{\sigma\}$ 的子列 $\{\sigma_l\}$,使得

$$\lim_{l\rightarrow +\infty}\frac{\alpha(\ln m(\sigma_l,\bar{g}))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma_l}\right)}=L-1\tag{13}$$

并记 $n(\sigma_l)=n_l$ 。记

$$F=\left\{\omega:\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\alpha(\ln m(\sigma,f_\omega))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)}<L-1\right\}$$
$$F_\varepsilon=\left\{\omega:\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\alpha(\ln m(\sigma,f_\omega))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)}<L-1-\varepsilon\right\}$$

于是, $F=\bigcup_{\varepsilon>0}F_\varepsilon$ 。

若 $\mathbb{P}(F)>0$,则存在 $\varepsilon_0>0$,使得 $\mathbb{P}(F_{\varepsilon_0})>0$ 成立,即对于任意的 $\omega\in F_{\varepsilon_0}$,有

$$\limsup_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{\alpha(\ln m(\sigma,f_\omega))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)}<L-1-\varepsilon_0$$

此外,由式(8)可知,存在 Ω_0 满足 $\mathbb{P}(\Omega_0)=0$,使得对任意的 $\omega\in(\Omega-\Omega_0)$,有

$$\omega\in\{|X_{n_l}|\geqslant\frac{d_1}{2}b_{n_l},\text{i.o.}\}$$

并且由 $\mathbb{P}(F_{\varepsilon_0})>0$ 得, $(\Omega-\Omega_0)\cap F_{m_0}\neq\phi$ 。从而存在 $\omega_0\in(\Omega-\Omega_0)\cap F_{m_0}$,对序列 $\{X_{n_l}(\omega_0)\}$ 存在的子列,不妨仍记为 $\{X_{n_l}(\omega_0)\}$,满足

$$|X_{n_l}(\omega_0)|\geqslant\frac{d_1}{2}b_{n_l}$$

从而

$$\frac{d_1}{2}m(s_l,\bar{g})=\frac{d_1}{2}b_{n_l}\mathrm{e}^{-\lambda_{n_l}s_l}\leqslant|X_{n_l}(\omega_0)|\mathrm{e}^{-\lambda_{n_l}s_l}\leqslant m(\sigma_l,f_{\omega_0}),$$

即

$$\ln m(s_l,\bar{g})<\alpha^{-1}\left[(L-1-\varepsilon_0)\alpha\left(\frac{1}{\sigma_l}\right)\right]$$

因此

$$\limsup_{l\rightarrow +\infty}\frac{\alpha(\ln m(\sigma_l,\bar{g}))}{\alpha\left(\frac{1}{\sigma_l}\right)}<L-1$$

与式(13)式矛盾。证毕。

情形(2) 同情形1证明类似,此处不再证明。

定理3证明 首先由引理4可知,对于任意的 $\omega\in\Omega$,a.s., $M(\sigma,f_\omega)$ 可以用 $m(\sigma,f_\omega)$ 替换。

下记 $A_{n,\alpha}(g,\alpha)=E_{n-1}(g,\alpha)\mathrm{e}^{\lambda_n\alpha}$ 。并令

$$\limsup_{n\rightarrow +\infty}\frac{\beta(\lambda_n)}{\left[\beta\left(\frac{\lambda_n}{\ln A_{n,\alpha}(g,\alpha)}\right)\right]^\rho}=\tau\tag{14}$$

则对于任意的正数 ε ,存在 $N(\varepsilon)>0$,使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时,有

$$\ln A_{n,\alpha}(g,\alpha)<\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}\left\{\left[\frac{\beta(\lambda_n)}{\tau+\varepsilon}\right]^\frac{1}{\rho}\right\}}$$

又由引理2可得

$$\ln|b_n|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}<\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}\left\{\left[\frac{\beta(\lambda_n)}{\tau+\varepsilon}\right]^\frac{1}{\rho}\right\}}-\lambda_n\sigma+\ln 2$$

最后由式(4),即

$$\limsup_{n\rightarrow +\infty}\frac{n}{\lambda_n}=D<\infty$$

和式(17)可得,对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N(\varepsilon)>0$,使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时,对任意的 $\omega\in\Omega$,a.s.,有

$$\ln|X_n|e^{-\lambda_n\sigma} \leq \ln b_n e^{-\lambda_n\sigma} + \ln n \leq \frac{\lambda_n}{\beta^{-1} \left\{ \left[\frac{\beta(\lambda_n)}{\tau + \varepsilon} \right]^{\frac{1}{\rho}} \right\}} - \lambda_n\sigma + \ln 2(D + \varepsilon)\lambda_n \quad (15)$$

由于 $\beta(\ln x) = \alpha(x)$, 因此由引理3(4) 以及式(15)可得, 存在 $0 < B < \frac{1}{2}$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon) > 0$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 有

$$\ln|X_n|e^{-\lambda_n\sigma} \leq \frac{2\lambda_n}{\beta^{-1} \left\{ \left[\frac{\beta(\lambda_n^B)}{\tau + \varepsilon} \right]^{\frac{1}{\rho}} \right\}} - \lambda_n\sigma$$

且

$$\beta^{-1} \left\{ \left[\frac{\beta(\lambda_n^B)}{\tau + \varepsilon} \right]^{\frac{1}{\rho}} \right\} \geq 2$$

因此, 当 $\sigma > 0$ 充分小时,

$$\frac{2}{\beta^{-1} \left\{ \left[\frac{\beta(\lambda_n^B)}{\tau + \varepsilon} \right]^{\frac{1}{\rho}} \right\}} - \sigma \leq 1$$

当 $\sigma > 0$ 充分小时, 令

$$H = H(\sigma) = \beta^{-1} \left\{ (\tau + \varepsilon) \left[\beta \left(\frac{2}{\sigma} \right) \right]^\rho \right\}$$

则对任意 $n > N(\varepsilon)$, 当 $\lambda_n \leq H$ 时, 有

$$\ln|X_n|e^{-\lambda_n\sigma} \leq \beta^{-1} \left\{ (\tau + \varepsilon) \left[\beta \left(\frac{2}{\sigma} \right) \right]^\rho \right\} \quad (16)$$

当 $\lambda_n > H$ 时, 有 $\frac{2}{\sigma} \leq \alpha^{-1} \left[\frac{\alpha(\lambda_n)}{L + \varepsilon} \right]$. 从而

$$\ln|X_n|e^{-\lambda_n\sigma} < \frac{\lambda_n}{2}(\sigma - \sigma) = 0$$

所以对任意 $n > N(\varepsilon)$, 式(16)成立, 因此对于任意的 $\omega \in \Omega$, a.s., 有

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\beta(\ln m(\sigma, f_\omega))}{\left[\beta \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right]^\rho} \leq \tau$$

下证等式成立。由Newton多边形作法和引理5(3)可知, 存在级数式(5), 满足

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\beta(\ln M(\sigma, \bar{g}))}{\left[\beta \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right]^\rho} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta(\ln M(\sigma, g))}{\left[\beta \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right]^\rho} = \tau$$

再选取序列 $\{\sigma\}$ 的子列 $\{\sigma_l\}$, 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\beta(\ln M(\sigma_l, \bar{g}))}{\left[\beta \left(\frac{1}{\sigma_l} \right) \right]^\rho} = \tau \quad (17)$$

并记 $n(\sigma_l) = n_l$, 记

$$F = \left\{ \omega : \limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\beta(\ln m(\sigma, f_\omega))}{\left[\beta \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right]^\rho} < \tau \right\}$$

$$F_\varepsilon = \left\{ \omega : \limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\beta(\ln m(\sigma, f_\omega))}{\left[\beta \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right]^\rho} < \tau - \varepsilon \right\}$$

于是, $F = \bigcup_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon$.

若 $\mathbb{P}(F) > 0$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\mathbb{P}(F_{\varepsilon_0}) > 0$ 成立, 即对于任意的 $\omega \in F_{\varepsilon_0}$, 有

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\beta(\ln m(\sigma, f_\omega))}{\left[\beta \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right]^\rho} < \tau - \varepsilon_0$$

此外, 由式(8)可知, 存在 Ω_0 满足 $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$, 使得对任意的 $\omega \in (\Omega - \Omega_0)$, 有

$$\omega \in \{|X_{n_l}| \geq \frac{d_1}{2} b_{n_l}, \text{i.o.}\}$$

且由 $\mathbb{P}(F_{\varepsilon_0}) > 0$ 得, $(\Omega - \Omega_0) \cap F_{m_0} \neq \emptyset$. 从而存在 $\omega_0 \in (\Omega - \Omega_0) \cap F_{m_0}$, 对序列 $\{X_{n_l}(\omega_0)\}$ 存在的子列, 不妨仍记为 $\{X_{n_l}(\omega_0)\}$, 满足

$$|X_{n_l}(\omega_0)| \geq \frac{d_1}{2} b_{n_l}$$

从而

$$\frac{d_1}{2} m(\sigma_l, \bar{g}) = \frac{d_1}{2} b_{n_l} e^{-\lambda_{n_l} \sigma_l} \leq |X_{n_l}(\omega_0)| e^{-\lambda_{n_l} \sigma_l} \leq m(\sigma_l, f_{\omega_0})$$

即

$$\ln m(\sigma_l, \bar{g}) < \beta^{-1} \left\{ (\tau - \varepsilon_0) \left[\beta \left(\frac{1}{\sigma_l} \right) \right]^\rho \right\}$$

因此

$$\limsup_{l \rightarrow +\infty} \frac{\beta(\ln M(\sigma_l, \bar{g}))}{\left[\beta \left(\frac{1}{\sigma_l} \right) \right]^\rho} < \tau$$

与式(17)矛盾。证毕。

参考文献:

- [1] 余家荣, 丁晓庆, 田范基. Dirichlet级数与随机Dirichlet级数的值分布 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.
- [2] 陈青远, 霍颖莹. Dirichlet级数的广义级[J]. 广东工业大学学报, 2019, 36(4): 52-58.

- series [J]. *Journal of Guangdong University of Technology*, 2019, 36(4): 52-58.
- [3] 应锐, 崔永琴, 徐洪焱. 半平面上Dirichlet级数的广义级与逼近[J]. *数学的实践与认识*, 2020, 50(12): 210-219.
- YING R, CUI Y Q, XU H Y. The generalizes order and approximation of Dirichlet series converges in the half plane [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2020, 50(12): 210-219.
- [4] 毕家焯, 霍颖莹. 多重Laplace-Stieltjes变换的两个等式[J]. *广东工业大学学报*, 2021, 38(1): 82-88.
- BI J Y, HUO Y Y. Two equalities of multiple Laplace-Stieltjes transform [J]. *Journal of Guangdong University of Technology*, 2021, 38(1): 82-88.
- [5] KONG Y Y, GAN H L. On orders and types of Dirichlet series of slow growth [J]. *Turkish Journal of Mathematics*, 2010, 34(1): 1-11.
- [6] 徐洪焱, 易才凤. 半平面上有限级Dirichlet级数的逼近[J]. *数学学报*, 2010, 53A(3): 617-624.
- XU H Y, YI C F. The approximation problem of Dirichlet series of finite order in the half plane [J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2010, 53A(3): 617-624.
- [7] YU J R. Some properties of random Dirichlet series [J]. *Acta Mathematica Sinica*, 1978, 21A(2): 97-118.
- [8] DING X Q, XIAO Y M. Natural boundary of random Dirichlet series [J]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2006, 58(7): 997-1005.
- [9] 孔荫莹, 霍颖莹. 慢增长的随机Dirichlet级数[J]. *数学年刊*, 2012, 33A(3): 323-328.
- KONG Y Y, HUO Y Y. The random Dirichlet series with slow growth [J]. *Chinese Annals of Mathematics*, 2012, 33A(3): 323-328.
- [10] IBRAGIMOV I A. Some limit theorems for stochastic processes stationary in the strict sense [J]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1959, 125(4): 711-714.
- [11] COGBURN R. Asymptotic properties of stationary sequences [M]. California: University of California, 1960.
- [12] HUO Y Y, KONG Y Y. On generalized orders and generalized types of Dirichlet series in the right half-plane [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2014, 34B(1): 175-182.
- [13] GUNDY R F. The martingale version of a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund [J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1967, 38(3): 725-734.
- [14] 王辉坚, 孙道椿. B-值双随机Dirichlet级数[J]. *数学物理学报*, 2010, 30A(6): 1604-1611.
- WANG H J, SUN D C. B-valued Bi-random Dirichlet series [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2010, 30A(6): 1604-1611.
- [15] 宁菊红, 朱丽荣, 黄文平. Dirichlet级数余项在右半平面的广义级和广义型[J]. *数学的实践与认识*, 2020, 50(17): 162-168.
- NING J H, ZHU L R, HUANG W P. Generalized order and generalized type of the remainder of Dirichlet series in the right half plane [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2020, 50(17): 162-168.
- (责任编辑: 杨耀辉)